Método didáctico avanzado para superar la arcaica "regla de tres" clásica, perfeccionada con la proporcionalidad de magnitudes

Daniel Arnaiz Boluda.
Universidad Europea de Madrid

Resumen
En este artículo se propone una nueva forma de enseñanza de los problemas propios de la llamada "regla de tres" con dos o más magnitudes, actualmente basada en dos hipótesis físicas. Se analizan los distintos métodos de resolución enseñados de la regla de tres compuesta, sistemas sin fundamento basados en la intuición en contra de la deducción que caracteriza a la ciencia matemática. El nuevo método propuesto de resolución se apoya en la "Primera álgebra de magnitudes", el cual se explica y fundamenta. Se realiza un estudio estadístico de la eficacia didáctica de todos los métodos con una muestra de 97 estudiantes y se exponen los resultados.

Palabras clave
Regla de tres, regla de tres simple, regla de tres compuesta, regla de tres con magnitudes, proporcionalidad de magnitudes, números concretos.

Teaching method to overcome the archaic classic "rule of three", perfected with the proportionality of magnitudes

Abstract
This article proposes a new way of teaching the problems of the so-called «rule of three with magnitudes», currently based on two physical hypotheses. The different methods of resolution taught from the compound «rule of three with magnitudes» are analyzed, systems based on intuition against deduction that characterizes mathematical science. The new proposed method of resolution is based on the "First algebra of magnitudes", which is explained and logic reasoned. A statistical study of the didactic effectiveness of all the methods of rule of three with magnitudes is carried out and the results are presented.

Keywords
Rule of three, simple rule of three, compound rule of three, rule of three with magnitudes, proportionality of magnitudes, concrete numbers.

Cita Bibliográfica recomendada de este artículo:
Arnaiz Boluda, D. (2024). Método didáctico avanzado para superar la arcaica "regla de tres" clásica, perfeccionada con la proporcionalidad de magnitudes *Criticæ. Revista Científica para el Fomento del Pensamiento Crítico, 3*(1), 28-45.

I. INTRODUCCIÓN

La regla de tres ha supuesto siempre una problemática en la didáctica para el aprendizaje de los alumnos. Durante mi carrera docente a nivel universitario he podido observar la confusión existente en general entre el alumnado para el correcto planteamiento de la proporción aritmética y de magnitudes según las distintas metodologías enseñadas cuando el problema plantea diferentes dimensiones, llegando a soluciones sin sentido lógico, cuestión que queda demostrado en el presente estudio estadístico.

Destacan Martínez, Muñoz y Oller (2015, p. 104) que "la tónica general al presentar los métodos de resolución es la ausencia total de justificaciones. La mayoría de los textos se limita a dar una serie de instrucciones para pautar los pasos a seguir para la construcción de la solución", algo con lo que se está de acuerdo y es precisamente el motivo que ha llevado a esta investigación.

Las matemáticas son una "ciencia deductiva que estudia las propiedades de los entes abstractos, como números, figuras geométricas o símbolos, y sus relaciones", definición dada en la quinta acepción del Diccionario de la Real Academia Española. Estas propiedades son precisamente el alma de la ciencia matemática, pues supone la necesidad de avanzar en ésta paso a paso, con lógica, pasando de lo universal a lo particular, demostrando a cada paso que se da las propiedades en que se basa no dando opciones a la mera intuición.

Por su parte, el Real Decreto 217/2022, de 29 de marzo, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Secundaria Obligatoria establece en el Anexo II sobre las matemáticas:

> El razonamiento, la argumentación, la modelización, el conocimiento del espacio y del tiempo, la toma de decisiones, la previsión y control de la incertidumbre o el uso correcto de la tecnología digital son características de las matemáticas [...] resulta importante desarrollar en el alumnado las herramientas y saberes básicos de las matemáticas que le permitan desenvolverse satisfactoriamente tanto en contextos personales, académicos y científicos como sociales y laborales.
>
> [...]
>
> La investigación en didáctica ha demostrado que el rendimiento en matemáticas puede mejorar si se cuestionan los prejuicios y se desarrollan emociones positivas hacia las matemáticas. [...] resolver problemas no es solo un objetivo del aprendizaje de las matemáticas, sino que también es una de las principales formas de aprender matemáticas. En la resolución de problemas destacan procesos como su interpretación, la traducción al lenguaje matemático, la aplicación de estrategias matemáticas, la evaluación del proceso y la comprobación de la validez de las soluciones.
>
> [...]
>
> La conexión entre las matemáticas y otras materias no debería limitarse a los conceptos, sino que debe ampliarse a los procedimientos y las actitudes, de forma que los saberes básicos matemáticos puedan ser transferidos y aplicados a otras materias y contextos.

Como veremos en los siguientes epígrafes ésta ha sido precisamente la falta apreciada con la llamada "regla de tres compuesta" no pudiendo ser denominada como hacen "proporcionalidad de magnitudes", no al menos con el planteamiento dado en la bibliografía actual. Y ello se debe a que la regla de tres con magnitudes no es simplemente matemática, sino que va más allá, perteneciendo a la rama de las matemáticas aplicadas desde el mismo instante en que se le están añadiendo las propias magnitudes o elementos dimensionales ocupando el espacio de otra disciplina como es la física.

En este punto debe destacarse que la confusión existente en torno a la regla de tres con magnitudes no se debe a un error propio de la matemática, pues no es algo puramente numérico, sino más bien de la física. Mochón (2012) ha apreciado un problema en la regla de tres achacándolo a su enseñanza mecánica en sustitución a la proporción proponiendo métodos didácticos muy interesantes; pero todos se caracterizan por la ausencia de las propias magnitudes.

El problema apreciado está en que las operaciones con magnitudes físicas traen consigo una omisión de las propias magnitudes en las operaciones, lo que acarrea una problemática grave: la aritmetización de la física. Así lo ha identificado el autor Arnaiz (2017, p. 25):

> Existe entonces una laguna pendiente de resolver en esto de las operaciones con magnitudes físicas, que provoca la proliferación de opiniones diversas y contradictorias respecto a su naturaleza y formulación, discusiones a las que se pondría fin simplemente definiendo las leyes de composición convenientes. Un grupo de autores como Tolman atribuyen a los símbolos de las expresiones dimensionales cierto carácter impenetrable o místico y consideran que "la verdade-

ra esencia de las magnitudes, desde el punto de vista físico, está representada por su fórmula dimensional" (*Physics Review*, 1917, p. 25). Esta hipótesis no parece que pueda ser cierta, porque supondría que magnitudes tan dispares como el momento de una fuerza y su trabajo, que pueden expresarse ambas en "*newton*×*metro*", fuesen esencialmente manifestaciones de la misma magnitud, la energía, lo cual parece a todas luces un desvarío, como justificamos en el apartado XXVI de la *Primera álgebra de magnitudes.*

Grandes autores como Planck indican que "tan falto de sentido es hablar de la dimensión 'real' de una magnitud como del nombre 'real' de un objeto", lo que supondría que las magnitudes físicas habrían de ocultarse al entendimiento.

Continúa afirmando (p. 27):

Todos los autores versados en análisis dimensional dan por sentado que las abreviaturas de unidades operen con la misma álgebra de los números abstractos, y sobre este presupuesto tácito y sin justificarlo en modo alguno elaboran sus respectivas teorías, que omiten absolutamente toda álgebra específica para las magnitudes. **Y lo mismo sucede en el ámbito educativo, donde se pasan por alto, como si no existiesen, los problemas filosóficos atenientes a las magnitudes y sus leyes de composición, enseñando las operaciones concretas de manera intuitiva, subjetiva y arbitraria, dejando en los alumnos, aun sin saberlo, un poso de incertidumbre** que vicia todo el conocimiento adquirido con esta laguna pendiente de ser clarificada.

Esta problemática de la aritmetización de las magnitudes, que bien se podría resumir en la realización de operaciones con números concretos simplemente omitiendo las magnitudes —lo que obvia la influencia del elemento dimensional en el resultado y convierte la operación física en cuestión meramente aritmética (de ahí el nombre de "aritmetización")— es ampliamente tratada por Arnaiz (2017), donde no sólo ha identificado la problemática y estudiado su origen en la historia, sino que ha planteado una solución que ha resultado ser la única vía aplicable para la demostración de algo tan básico como la regla de tres con magnitudes o también conocida como "proporcionalidad entre magnitudes" —expresión inexacta según la metodología didáctica empleada dado que la proporcionalidad aplicada es sobre los números, y no sobre los elementos dimensionales—.

Con la aplicación de la *Primera álgebra de magnitudes* a la proporcionalidad de magnitudes podrá el lector observar que el planteamiento actual carece de sentido reduciendo todo a algo mucho más simple y deductivo eliminando cualquier atisbo de mera intuición a la que hacían referencia Martínez, Muñoz y Oller (2015, p. 104).

El problema de la aritmetización de las magnitudes con el planteamiento actual conduce a cuestiones como los problemas de estimación de magnitudes no alcanzables planteados por Albarracín y Gorgorio (2013).

Con objeto de ubicar al lector para la correcta comprensión de la problemática práctica didáctica existente en la docencia actualmente, en primer lugar se planteará un problema práctico exponiendo las diferentes metodologías enseñadas para la solución. Posteriormente se plantearán los conceptos necesarios de la *Primera álgebra de magnitudes* aplicables a este tema con las correspondientes demostraciones para, finalmente, aplicarlo al mismo problema planteado.

Finalmente, se expondrán los resultados de un estudio estadístico con el que se mide la eficacia en la enseñanza de cada uno de los cuatro métodos (los tres tradicionales y el cuarto propuesto), evaluando la proporción de los estudiantes que resuelven correctamente un problema mediante cada uno de los métodos didácticos. Este estudio estadístico se ha realizado entre estudiantes universitarios a fin de conocer en primer lugar cuántos recuerdan cómo resolver un problema correctamente antes de enseñar los distintos métodos. Ello sin perjuicio de la propuesta de investigación posterior planteada al final de este artículo entre estudiantes de secundaria.

II. PROBLEMAS DE REGLA DE TRES COMPUESTA

Los problemas propios de la regla de tres compuesta son los que presentan más de dos magnitudes. Son simples los problemas con dos magnitudes.

El problema que se ha tomado como referencia para contrastar los principales métodos didácticos con el cuarto propuesto en esta investigación cuenta con cuatro magnitudes, siendo su enunciado el siguiente: Si 5 hombres abren 40 metros de zanja en 8 días trabajando 6 horas diarias, ¿cuántos días necesitarán 9 hombres trabajando 8 horas diarias para abrir una zanja de 60 metros?

Se ha escogido un problema con este contexto por los argumentos dados por Martínez, Muñoz y Oller (2015, p. 105): "los contextos predominantes en los problemas [planteados en los libros escolares] son los de 'producción o consumo en un marco de trabajo cooperativo' y 'costes económicos o temporales de una actividad'" siendo sólo en los textos de Anaya en los que "aparecen problemas que involucran magnitudes de la Física". Sin embargo, se opina que son precisamente con las magnitudes de esta ciencia donde se observa la naturaleza propia de la matemática aplicada respecto al contenido de la regla de tres compuesta, sin perjuicio de que el método propuesto pueda ser aplicado igualmente a cualquier otro tipo de contexto.

Son distintos métodos de resolución los que se han tenido en consideración en este estudio: reducción a la unidad, proporciones y método práctico, los mismos aplicados complementaria o sustitutivamente, e incluso combinándolas, en toda la bibliografía didáctica matemática consultada (Zuasti, 2022; González, 2020; García y Ortega, 2016; Mira, 2016; Vallejo y Fuentes, 2016; *Didáctica de las matemáticas para maestros de educación primaria*, 2016; García y Resano, 2015; Segovia y Rico, 2015; Volera y Gazxtelu, 2014; *Matemáticas* 7, 2011; Gómez, 2006; Galdós, 2000; Postigo, 1998; *Matemáticas. Regla de tres,* 1982). El método de las proporciones no se ha observado en ninguna bibliografía escolar de forma independiente. No obstante, se ha considerado relevante introducirlo también en esta investigación al haber sido objeto de estudio en artículos de investigación como el de Gómez (2006).

Un estudio interesante es el propuesto por Silvestre y da Ponte (2012) quienes sugieren que, antes de la enseñanza de la proporción directa o regla de tres directa, los alumnos hacen uso de cálculos simultáneos con sumas y multiplicaciones con "estrategias rudimentarias" como el conteo unitario. Finalizan haciendo una observación sobre la capacidad del alumno de comprender la relación entre las variables y el contexto del problema. Esta última observación es algo realmente importante pues el sistema propuesto en este artículo en sustitución a los puramente intuitivos enseñados y que veremos a continuación supone precisamente facilitar algebraicamente la simbología representativa de la realidad.

Bastante interesante es la observación realizada por Ibáñez y Martínez (2020, p. 53) quienes afirman que en ninguno de los libros de texto en los que se enseñan las proporciones compuestas (refiriéndose a la regla de tres compuesta) distingue entre las cantidades de magnitudes y números, una cuestión que aquí se ha adelantado con el problema de la aritmetización de la física.

1. Métodos de resolución docentes actuales.

Antes de aplicar cada uno de ellos debemos hacer alusión a dos premisas sin demostración de las que se parte:

1.ª Se dice que dos magnitudes son directamente proporcionales cuando al multiplicar una de ellas por un número la otra resulta multiplicada por el mismo número y al dividir una de ellas por un número la otra resulta dividida por el mismo número (Grence, 2023, p. 27; Llanos Vaca et al., 2022, p. 131; Galdós, 2000, p.197; Carrillo et al., 2016, p. 157).

2.ª Por el contrario, se dice que dos magnitudes son inversamente proporcionales cuando al multiplicar una de ellas por un número la otra queda dividida por el mismo número y al dividir una de ellas por un número la otra queda multiplicada por el mismo número (Grence, 2023, p. 29; Llanos Vaca et al., 2022, p. 131; Carrillo et al., 2016, p. 157; Galdós, 2000, p. 198).

1.1. Método de la reducción a la unidad.

Siguiendo la misma bibliografía, "se trata de encontrar los días que tardaría 1 hombre que trabajara 1 hora diaria en hacer una zanja de 1 metro y a continuación calcular el tiempo que tardarían los 9 hombres trabajando 8 horas diarias para abrir la zanja de 60 metros" (Galdós, 2000, p. 199). Según explica Zuasti (2022, p. 47) se tienen cuatro magnitudes: los días de trabajo, las horas diarias de trabajo, número de hombres y el tamaño de la zanja considerando que "el mejor método es reducirlo a un problema de proporcionalidad simple".

Con ese fin, se propone la multiplicación de $5\times8=40$ días que tardará un hombre trabajando 6 horas diarias para una zanja de 40 metros. Multiplicando $40\times6=240$ se obtienen los días que tardaría 1 hombre trabajando 1 hora diaria para abrir una zanja de 40 metros. Para finalizar, proponen que al dividir $240\div40=6$ se obtienen los días que tardaría 1 hombre trabajando 1 hora diaria para abrir una zanja de 1 metro. Al realizar la operación

$$\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$$

son los días que tardarían 9 hombres trabajando 1 hora diaria para conseguir una zanja de 1 metro. Al realizar la operación

$$\frac{\frac{2}{3}}{8}=\frac{1}{12}$$

se obtiene la porción del día que tardarían 9 hombres trabajando 8 horas diarias para una zanja de 1 metro. Para terminar, multiplicando

$$\frac{1}{12} \times 60 = 5$$

son los días que invertirán 9 hombres trabajando 8 horas diarias para obtener una zanja de 60 metros respondiendo al problema planteado.

1.2. Método de las proporciones.

Aunque en el sistema LOGSE este método se había perdido por completo, parece que con el sistema LOMCE ha ganado terreno combinándose con otros métodos (Martínez et al., 2015, p. 104), por lo que se ha traído a este estudio en su versión independiente procurando ser fiel a la simbología original[1].

Consiste en la organización de los distintos datos numéricos en función de las magnitudes que las acompañan. Así, en una primera fila se colocan los datos del supuesto dado y en una segunda los de la pregunta donde se encuentra la incógnita:

Supuesto	5 hombres	6 horas día	40 metros	8 días
Pregunta	9 hombres	8 horas día	60 metros	*x*

El primer paso de este método consiste en la descomposición en reglas de tres simples, de tal forma que, en primer lugar, tendríamos:

Supuesto	5 hombres	8 días
Pregunta	9 hombres	*x*

Según la propia explicación dada para esta metodología "el número de hombres y el tiempo empleado son magnitudes inversamente proporcionales puesto que a más hombres menos tiempo y a menos hombres más tiempo" (Galdós, 2000, p. 201).

Se llega a la siguiente proporción:

$$9:5::8:y$$

Puede observarse que se ha reducido la proporción a una operación con dos únicas magnitudes, aunque éstas se han eliminado de la ecuación.

Análogamente, se dice, tendremos:

Supuesto	6 horas día	*y* días
Pregunta	8 horas día	*z*

Nuevamente se alude a que "el número de horas diarias y el tiempo empleado son magnitudes inversamente proporcionales puesto que a más horas menos tiempo y a menos horas más tiempo". Obteniéndose:

$$8:6::y:z$$

Mismo criterio aplican para la última proporción:

Supuesto	40 metros	z días
Pregunta	60 metros	x

En este caso, se afirma que "la longitud de la zanja y el tiempo empleado son magnitudes directamente proporcionales" llegando a la siguiente proporción:

$$40:60::z:x$$

Por último, se trata de multiplicar término a término las proporciones obtenidas:

$$\frac{9\times8\times40}{5\times6\times60} = \frac{8\times y\times z}{y\times z\times z}$$

Resolviendo la operación matemática queda:

$$x = \frac{8\times5\times6\times60}{9\times8\times40} = 5$$

Siendo así la solución propuesta "5 días".

1.3. Método práctico.

Este método es explicado con las siguientes palabras por Galdós (2000, p. 202):

> Se escriben el supuesto y la pregunta y a continuación se compara cada una de las magnitudes con la incógnita suponiendo que las demás magnitudes permanecen constantes, para ver si dichas magnitudes son directa o inversamente proporcionales con la incógnita. A las magnitudes que son directamente proporcionales con la incógnita se les pone en la parte inferior un signo + y en la parte superior un signo −, y a las magnitudes que son inversamente proporcionales con la incógnita se les pone en la parte inferior un signo menos y en la parte superior un signo +. Una vez hecho esto, el valor de la incógnita será igual al dato conocido de su especie, que se supondrá que siempre lleva signo +, multiplicado por todas las cantidades que llevan el signo + y dividido por todas las cantidades que llevan el signo −. Es el método más rápido de resolución de todo tipo de problemas de regla de tres.

1. La simbología empleada en este método es propia de la bibliografía original al tratarse de proporciones, es decir, el símbolo ":" se corresponde aritméticamente a la división y el símbolo "::" a la igualdad. Esta simbología es empleada desde Bails, B. (1805), Galdós (2000, 199-201) o de Gómez Alfonso (2006, p. 58). Sin embargo, en el material docente de la ESO no se ha observado en ninguna de las ediciones recientes, aunque se ha considerado interesante mantenerlo en el estudio.

Siguiendo estos pasos, nuestro problema quedaría planteado así:

	+	+	−	+
Supuesto	5 hombres	6 horas diarias	40 metros	8 días
Pregunta	9 hombres	8 horas diarias	60 metros	x
	−	−	+	−

Así, afirma Galdós (2000, p. 203):

> Como puede observarse, el número de hombres y el tiempo empleado son magnitudes inversamente proporcionales y, por lo tanto, ponemos el signo + encima de los hombres y el signo – debajo. Análogamente, el número de horas diarias y el tiempo empleado son magnitudes inversamente proporcionales y, por lo tanto, ponemos el signo + encima de las horas diarias y el signo – debajo. De modo similar, la longitud de la zanja y el tiempo empleado son magnitudes directamente proporcionales y, por lo tanto, ponemos el signo – encima de la longitud y el signo + debajo.

Con todo ello, se ha de intuir que la operación a realizar es, en días:

$$x = \frac{8 \times 60 \times 6 \times 5}{40 \times 8 \times 9} = 5$$

2. Método propuesto de resolución en base a la Primera álgebra de magnitudes.

El tema de la regla de tres con magnitudes es la primera de las lecciones de Matemática aplicada, pues es la primera vez en la que se introducen magnitudes a los números. Por tanto, es el primer momento en el que nos encontramos con la problemática de la aritmetización de la física.

Cuando se han indicado en el problema propuesto las cantidades "5 hombres", "6 horas diarias", "40 metros" u "8 días", cada una de las cuatro medidas es lo que se denomina "díada". Toda díada estará compuesta por dos elementos: el número abstracto y el elemento dimensional o magnitud al que acompaña que da un sentido natural al número abstracto. Así se expone por Arnaiz (2017, p. 51) cuando afirma: "en general, hemos llamado medición a la cantidad, extensión o porción de una magnitud expresada con la forma $q\ U$, como símbolo de las veces q, un número real, que una cantidad unitaria U esté presente en un fenómeno, denominando a q medida con la unidad U de la magnitud incluida en el hecho observado".

De esta forma, en nuestro caso U=día y q=8, pues tal y como continúa, "este ente recién nacido que alude a la medición física también podría recibir el nombre matemático de, por ejemplo, ente concreto o díada física, y a sus elementos les llamaremos primario o medida q o $\overline{q}$, y unidad U o secundario. El primario es la parte matemática de la díada. El secundario es la parte física o dimensional".

La problemática surge cuando queremos operar con díadas, realizando sumas, restas, multiplicaciones, divisiones, etc., de tal forma que no obviemos al elemento dimensional —la magnitud— de la díada. La solución planteada es el que da nombre al propio libro: la *Primera álgebra de magnitudes*, donde se dan los primeros pasos para las operaciones con las magnitudes a partir de la geometría procurando una nueva simbología que la diferencie de la meramente aritmética.

La deducción de la proporcionalidad de las magnitudes basada en el álgebra de magnitudes en los que se basan los problemas tipo de la regla de tres compuesta se realiza en los siguientes epígrafes.

2.1. Proporciones con díadas homogéneas.

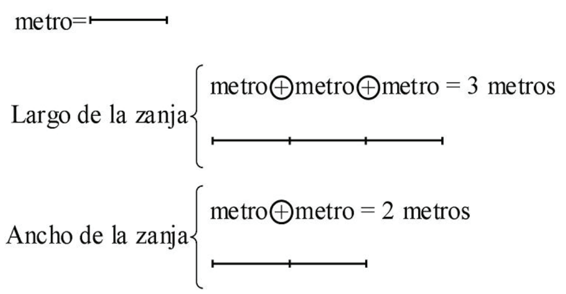
Con objeto de ser claro en la exposición, en primer lugar se expondrá un problema más sencillo que el inicial partiendo de la propia definición de la regla de tres siguiendo a Galdós (2000, p. 198): "la regla de tres es la operación aritmética que consiste en determinar el cuarto término de una proporción conocidos los otros tres".

El problema que se plantea es el siguiente: se ha hecho una zanja de 3 metros de largo por 2 de ancho. Se quiere hacer otra cuyos lados sean proporcionales a los de la zanja anterior siendo el lado más largo de 6 metros. ¿Cuánto debe medir su ancho para que ambos lados sean proporcionales a los de la zanja pequeña?

Se observa en la Figura 1 dos díadas: la primera se refiere al largo de la zanja, "3 metros"; y la segunda al ancho, "2 metros". En *Primera álgebra de magnitudes* se opera geométricamente definiendo cada magnitud según un segmento. Así, "metro" se concreta en un segmento de una medida concreta. Puesto que las dos díadas tienen como elemento dimensional "metro", los segmentos que los representan tendrán la misma medida.

Figura 1

Representación geométrica de las díadas.



Si analizamos cada dimensión de la zanja, el largo es "3 metros", lo que geométricamente supondría coger el segmento "metro" y adicionarlo tres veces, como se observa en la Figura 1. Simbólicamente no podemos utilizar el signo +, pues estamos en álgebra de magnitudes con geometría, no en aritmética, y debemos dejar clara la distinción en las propias operaciones. Así, respetando la simbología de la *Primera álgebra de magnitudes*[2], el signo que utilizaremos será ⊕, quedando:

metro ⊕ metro ⊕ metro = 1 metro ⊕ 1 metro ⊕ 1 metro = (1+1+1) metros = 3 metros

El problema consiste en añadir a estos 3 segmentos de "metro" de largo otros 3 más de igual longitud y calcular cuántos segmentos de "metro" debemos añadir a los 2 que ya tenemos de ancho para mantener la proporcionalidad. Con ello, la operación algebraica geométrica respecto al largo de la zanja será:

3 metros ⊕ 3 metros = (3+3) metros = 6 metros

Para responder al enunciado, podemos observar que el largo, compuesto por 3 segmentos de "metro", le ha sido adicionado otro tanto:

3 metros ⊕ 3 metros = 2 ○ (3 metros) = 6 metros

Nuevamente, el símbolo de la multiplicación por todos conocido para las operaciones con números abstractos no puede ser utilizado igualmente para las multiplicaciones geométricas de un número abstracto por una díada, habiéndose escogido el símbolo ○ siguiendo la *Primera álgebra de magnitudes*. Lo mismo ocurre en el caso de la división, cuyo símbolo como operación geométrica utilizado es //.

Así, si comparamos el largo de la zanja antes y después de la adición realizada, resulta que obtendremos el multiplicador del ancho de dicha zanja para responder a la pregunta:

$$\frac{6 \text{ metros}}{3 \text{ metros}} = \frac{6}{3} = 2$$

Obsérvese que al dividir dos díadas homogéneas da como resultado un número abstracto, pues se está dividiendo geométricamente una magnitud entre sí misma. Así lo explica Arnaiz (2017, p. 152). Esto es así dado que, algebraicamente:

a ○ (b magnitud)=c magnitud →
a= (c magnitud)//(b magnitud)

Con objeto de facilitar el planteamiento de la solución al problema, dadas las medidas del largo y ancho de la zanja antes y después de la adición cuyo ancho final se desconoce, tendremos:

$$\frac{6 \text{ metros}}{3 \text{ metros}} = \frac{x \text{ metros}}{2 \text{ metros}} \rightarrow \frac{6}{3} = \frac{x}{2} \rightarrow x = \frac{6}{3} \times 2 = 4$$

Veámoslo con otro ejemplo: si 12 abrigos cuestan 360 euros, ¿cuánto costarán 8 abrigos? El problema con magnitudes lo plantearemos como:

$$\frac{12 \text{ abrigos}}{8 \text{ abrigos}} = \frac{360\,€}{x\,€} \rightarrow \frac{12}{8} = \frac{360}{x} \rightarrow x = \frac{360 \times 8}{12} = 240$$

Pero ¿240 qué exactamente? Para responder a esta pregunta se acude a la proporción geométrica donde tenemos la díada con su magnitud pudiendo completar la díada del consecuente de la segunda razón geométrica, refiriéndose a 240 euros.

Expuesta la adición diádica con dos ejemplos distintos, es momento de comprobar la propiedad genérica para su validez a cualquier caso particular.

2. La simbología de la *Primera álgebra de magnitudes* es desarrollada a lo largo de todo el tomo a medida que se realizan las distintas demostraciones. No obstante, el autor facilita un esquema sinóptico de todos los signos utilizados para las distintas operaciones, diferenciándolas según se trate de álgebra numérica ordinaria o diádica (Arnaiz, 2017, p. 220).

2.2. Demostración de las proporciones con díadas homogéneas.

Dados un elemento numérico “a” y su magnitud o elemento dimensional “magnitud$_a$” obteniendo la díada “a magnitud$_a$”, si se le aplica un multiplicador abstracto cualquiera tal que “x”, se produce la operación geométrica siguiente:

$$a\ magnitud_a \rightarrow x \circ (a\ magnitud_a)$$

Para que la razón de esta adición sea proporcional a la adición de otra razón de distinta díada tal que “b magnitud$_b$”, el multiplicador debe ser el mismo:

$$b\ magnitu_d \rightarrow x \circ (b\ magnitud_b)$$

de tal forma que siempre se cumplirá que:

$$\frac{x \circ (a\ magnitud_a)}{a\ magnitud_a} = \frac{x \circ (b\ magnitud_b)}{b\ magnitud_b} \rightarrow \frac{x \times a}{a} = \frac{x \times b}{b}$$

quedando demostrada la propiedad de las proporciones con díadas homogéneas, que puede ser enunciada como sigue: para que dos razones entre díadas homogéneas o aditivas sean proporcionales deben tener el mismo multiplicador o cociente abstracto.

Podrá observar el lector que esta propiedad anula una de las premisas en las que se basa la regla de tres con magnitudes, concretamente la que alude a la “proporcionalidad directa entre magnitudes”.

2.3. Proporciones con díadas heterogéneas.

Continuando con el mismo tipo de planteamiento, partamos de un ejemplo sencillo: si 6 obreros hacen una obra en 20 días, ¿cuánto tiempo tardarán en hacer la misma obra 8 obreros?

En este caso, las díadas con las que nos encontramos tienen como elementos dimensionales “obreros” por un lado y “días” por otro. Ello hace que la naturaleza de las magnitudes sea diferente, por lo que su combinación da lugar a una tercera magnitud que puede definirse como “trabajo necesario para finalizar la obra”, por lo que la relación entre ambas díadas ya no es aditiva, como ocurría en los problemas anteriores.

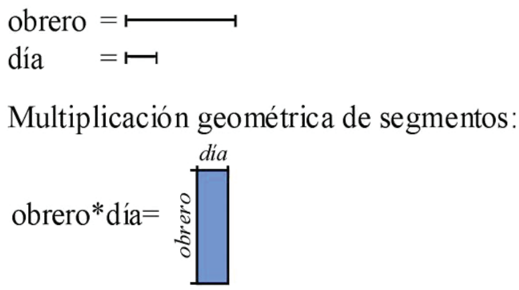
Esto es lo que en *Primera álgebra de magnitudes* se ha venido a denominar como “díadas heterogéneas”, cuyo tratamiento geométrico debe ser distinto en cuanto a la relación entre las dos magnitudes.

Así, como cualquier otra magnitud, “obrero” y “día” quedarán definidos geométricamente por sendos segmentos cada uno de igual o distinta longitud. ¿Cómo han de relacionarse ambas magnitudes? Mediante la multiplicación geométrica.

De esta forma, definiendo la magnitud “obrero” como un segmento de determinada longitud fija y la magnitud “día” como otro segmento de igual o distinta longitud también fija, al multiplicar ambos segmentos geométricamente se obtiene un área que expresa la tercera magnitud directamente relacionada con las dos anteriores: la unidad compuesta en la que se medirá el trabajo necesario para terminar esa obra. Gráficamente se muestra en la Figura 2.

Figura 2

Representación gráfica de díadas heterogéneas



Para realizar la operación de la multiplicación geométrica entre dos díadas no podemos hacer uso del signo × o • utilizados para números abstractos, ni tampoco del símbolo ○ definido en la *Primera álgebra de magnitudes* para el producto entre un número abstracto por una díada. Así, siguiendo la misma bibliografía, el signo escogido es *.

Con todo ello, la realización de la obra en cuestión necesita de 6 obreros y 20 días de trabajo, el área geométrica que se obtenga con la multiplicación de ambas díadas es el “trabajo necesario para terminar la obra” (Figura 3), lo que simbólicamente quedará:

$$6\ obreros * 20\ días = trabajo\ necesario$$

Figura 3

Representación gráfica de las díadas heterogéneas del ejemplo

La cuestión planteada es: para finalizar esa misma obra o, dicho de otro modo, el trabajo necesario para terminar la obra con 8 obreros, ¿cuántos días requerirá?
Ello supone que se nos está planteando otra operación geométrica, pero el resultado es el mismo:

$$8 \text{ obreros} * x \text{ días} = \text{trabajo necesario}$$

Por tanto:

$$6 \text{ obreros} * 20 \text{ días} = 8 \text{ obreros} * x \text{ días}$$

Si operamos de forma separada los elementos numéricos de los dimensionales en el primer lado de la igualdad:

$$(6 \cdot 20) \circ \text{obreros} * \text{días} = 8 \text{ obreros} * x \text{ días}$$

Despejando geométricamente la díada que es la incógnita en el problema, obtenemos:

$$\frac{(6 \cdot 20) \circ \text{obreros} * \text{días}}{8 \text{ obreros}} = x \text{ días}$$

Como se ha explicado anteriormente, “al dividir dos díadas homogéneas da como resultado un número abstracto, pues se está dividiendo geométricamente una magnitud entre sí misma”.

$$\frac{(6 \cdot 20) \circ \text{días}}{8} = x \text{ días}$$

Separando en el primer lado de la igualdad y operando los números abstractos de la magnitud “día”, queda:

$$\frac{(6 \cdot 20)}{8} \circ \text{días} = x \text{ días}$$

Así, resulta que:

$$15 \text{ días} = x \text{ días}$$

Con ello, queda respondida la pregunta concluyendo que para terminar la misma obra con 8 obreros se necesitan 15 días.

Como hemos hecho en el caso de las proporciones con díadas homogéneas pongamos un segundo ejemplo de proporciones con díadas heterogéneas: un automóvil a 140 kilómetros por hora tarda 4 horas en completar un viaje. ¿Cuánto habría tardado si hubiera viajado a 112 kilómetros por hora?

Se observa que las magnitudes dadas son “velocidad” y “tiempo”, por lo que ambas combinadas dan lugar a una tercera magnitud: “distancia total recorrida”. El tiempo se mide en este caso en “horas”, y la velocidad en “kilómetros por hora”. Definiendo geométricamente cada una de las dos magnitudes dadas por un segmento de determinada longitud, igual o diferente, al combinarlas darán lugar a un área que será la distancia recorrida en kilómetros. Así, teniendo en cuenta los datos del problema, la operación geométrica será:

$$\text{Distancia} = 140 \text{ kilómetros por hora} * 4 \text{ horas}$$

Para el caso de la pregunta planteada, siendo la distancia (área del cuadrado geométrico obtenido) la misma:

$$\text{Distancia} = 112 \text{ kilómetros por hora} * x \text{ horas}$$

Como ambos productos geométricos valen la misma área, conocemos su igualdad:

$$140 \text{ kilómetros por hora} * 4 \text{ horas} = 112 \text{ kilómetros por hora} * x \text{ horas}$$

Operando mediante la simbología geométrica establecida:

$$\frac{140 \text{ kilómetros por hora}}{112 \text{ kilómetros por hora}} \ast 4 \text{ horas} = x \text{ horas}$$

Teniendo ambas díadas de la división geométrica los mismos elementos dimensionales “kilómetros por hora” en numerador y denominador y separando los elementos numéricos del dimensional resultante:

$$\left(\frac{140}{112} \text{ x } 4 \right) \circ \text{ horas} = x \text{ horas}$$

Con ello, se resuelve que:

$$5 \text{ horas} = x \text{ horas}$$

quedando respondida la pregunta.

No obstante, conviene hacer aquí un inciso, pues se ha operado algebraicamente con una magnitud (la velocidad), que es a su vez parte de otra combinación de díadas. La velocidad se mide en kilómetros por hora tal y como se ha tratado en el problema; pero este planteamiento puede ser diferente si tenemos en cuenta que la velocidad está expresada en el espacio recorrido en un periodo de tiempo concreto unitario, de tal forma que el supuesto quedará:

$$\text{distancia} = \frac{140 \text{ kilómetros}}{1 \text{ hora}} \ast 4 \text{ horas}$$

mientras que la pregunta será:

$$\text{distancia} = \frac{112 \text{ kilómetros}}{1 \text{ hora}} \ast x \text{ horas}$$

Se llega así a la siguiente igualdad que, operando geométricamente:

$$\frac{140 \text{ kilómetros}}{1 \text{ hora}} \ast 4 \text{ horas} = \frac{112 \text{ kilómetros}}{1 \text{ hora}} \ast x \text{ horas}$$

$$(140 \bullet 4) \circ \frac{\text{kilómetros} \ast \text{horas}}{\text{hora}} =$$

$$(112 \bullet x) \circ \frac{\text{kilómetros} \ast \text{horas}}{\text{hora}}$$

Siendo la combinación de magnitudes iguales resulta que se llega a la igualdad aritmética con la que se obtiene la misma solución del planteamiento anterior:

$$x = \frac{140 \bullet 4}{12} = 5$$

2.4. Demostración de las proporciones con díadas heterogéneas.

Continuando con la misma metodología que con las díadas homogéneas demostremos a continuación que las proporciones se cumplen con las díadas heterogéneas, estableciendo una nueva propiedad general aplicable a cualquier caso particular, como sistema deductivo que caracteriza a la matemática aplicada, en este caso, a la física.

Teniendo dos díadas heterogéneas tales como “a magnitud_a” y “b magnitud_b”, éstas dan lugar a una tercera “c magnitud_c” que es combinación de las dos mediante multiplicación geométrica:

$$a\ \text{magnitud}_a \circ b\ \text{magnitud}_b =$$

$$(a \bullet b) \circ \text{magnitud}_a \ast \text{magnitud}_b = c\ \text{magnitud}_c$$

de tal forma que ha de mantenerse invariable el valor de la díada combinada

$$(a \bullet b) \circ \text{magnitud}_a \ast \text{magnitud}_b$$

que es el área del rectángulo abstracto formado. Al multiplicar cualquiera de las dos díadas originales, que son los lados de dicho rectángulo, la otra quedará dividida manteniendo la igualdad geométrica del área.

Así, en el planteamiento general anterior, supongamos que la primera díada aumenta su valor por un multiplicador abstracto tal que “x”. Al mantenerse la díada combinada (el área del rectángulo) invariable se perdería la igualdad:

$$[x \circ (a\ magnitud_a)] * b\ magnitud_b \neq$$

$$(a \bullet b) \circ magnitud_a * magnitud_b$$

Para mantener dicha igualdad siendo la díada combinada invariable, la segunda díada se verá alterada quedando dividida por ese mismo multiplicador, lo que simbólicamente se expresa:

$$[x \circ (a\ magnitud_a)] * [(1/x) \circ b\ magnitud_b] =$$

$$(a \bullet b) \circ magnitud_a * magnitud_b$$

Ello es así pues, si operamos el primer miembro de la igualdad geométricamente:

$$[x \circ (a\ magnitud_a)] * [(1/x) \circ b\ magnitud_b] =$$

$$(x \bullet a \bullet b/x) \circ magnitud_a * magnitud_b$$

no siendo necesario recordar que un número entre sí mismo es la unidad.

Con todo ello, puede formularse la proporción entre díadas heterogéneas así: dada la combinación entre dos díadas heterogéneas que dan lugar a una tercera combinada, cuando la primera díada se vea multiplicada o dividida por un número abstracto, para mantener dicha igualdad siendo la díada combinada invariable la segunda díada quedará dividida o multiplicada respectivamente por ese mismo número abstracto.

3. Aplicación del método *Primera álgebra de magnitudes* propuesto al problema planteado.

Recordemos el enunciado del problema inicial: si 5 hombres trabajando 6 horas diarias han abierto una zanja de 40 metros en 8 días, ¿cuántos días necesitarán 9 hombres trabajando 8 horas diarias para abrir una zanja de 60 metros?

En el supuesto planteado se observan las siguientes díadas: “5 hombres”, “6 horas diarias”, “8 días” y “40 metros”. Inmediatamente se observa que entre las magnitudes “horas diarias” y “días” existe una relación homogénea, que es el “tiempo”, siendo así que el elemento dimensional “días” es redundante de las “horas diarias”, constituyéndose el elemento numérico como el multiplicador o número abstracto. Así, el planteamiento simbólico de este hecho puede ser:

$$8 \circ (6\ \text{horas diarias}) = 6 \circ (8\ \text{días}) = (6 \bullet 8) \circ \text{horas}$$

Sin embargo, de la combinación entre el “tiempo” y los “hombres” que trabajan surge una nueva magnitud, la “longitud de la zanja” en cuestión que es el trabajo realizado. Así, geométricamente, el “tiempo” y los “hombres” que trabajan quedarán definidos por sendos segmentos de determinada longitud adicionados tantas veces como el multiplicador abstracto establece, y cada una de las díadas resultantes formará uno de los lados del área que forman mediante la multiplicación geométrica. Así:

$$(6 \bullet 8) \circ \text{horas} * 5\ \text{hombres} = 40\ \text{metros}$$

De igual forma, para el planteamiento simbólico de la pregunta:

$$(8 \bullet x) \circ \text{horas} * 9\ \text{hombres} = 60\ \text{metros}$$

Se observa que en este caso el área que forma la combinación de las dos díadas no es la misma; pero, como no puede ser de otra manera, sí tienen el mismo elemento dimensional, por lo que si en cada una de las igualdades geométricas reducimos la díada combinada a la unidad dimensional tendremos en cada caso:

$$\frac{(6 \bullet 8) \circ \text{horas} * 5\ \text{hombres}}{40} = \text{metros}$$

$$\frac{(8 \bullet x) \circ \text{horas} * 9\ \text{hombres}}{60} = \text{metros}$$

Así, obtenemos la siguiente igualdad:

$$\frac{(6\bullet 8) \circ \text{horas} \ast 5 \text{ hombres}}{40} = \frac{(8\bullet x) \circ \text{horas} \ast 9 \text{ hombres}}{60}$$

Operando geométricamente distinguiendo los números abstractos de las magnitudes:

$$\frac{(6\bullet 8\bullet 5)}{40} \circ \text{horas} \ast \text{hombres} = \frac{(8\bullet x\bullet 9)}{60} \circ \text{horas} \ast \text{hombres}$$

de lo que resulta:

$$\frac{6\bullet 8\bullet 5}{40} = \frac{8\bullet x\bullet 9}{60}$$

Con todo ello, obtenemos el valor de la incógnita:

$$x = \frac{6\bullet 8\bullet 5\bullet 60}{40\bullet 8\bullet 9} = 5$$

Recuperando el elemento dimensional de la incógnita, la respuesta a la pregunta es que se necesitarán 5 días de trabajo.

III. PLANTEAMIENTO DEL NUEVO MÉTODO PROPUESTO BASADO EN LA *PRIMERA ÁLGEBRA DE MAGNITUDES*.

Con todo lo razonado, se propone el método basado en la *Primera álgebra de magnitudes* en los siguientes términos sin perjuicio de los razonamientos anteriores.

La *Primera álgebra de magnitudes* plantea la no eliminación de las magnitudes en las operaciones de la física proponiendo el álgebra de magnitudes como solución al problema de la aritmetización de la física. Así, toda medida está compuesta por dos elementos: uno numérico y otro dimensional. Por ejemplo, "5 metros de largo" se compone del elemento numérico "5" y el dimensional "metro de largo", y a efectos algebraicos se multiplican. Si se añaden más "metros de largo" aumentará el número abstracto 5 siendo una proporción homogénea, pues el elemento dimensional es el mismo: "metro de largo". Si se añaden medidas de distinta naturaleza, es decir, con elemento dimensional diferente como "2 metros de ancho", estaremos ante una proporción heterogénea que es la multiplicación geométrica de las dos medidas "5 metros de largo" y "2 metros de ancho", dando lugar a una tercera medida: "superficie".

Al igual que en las operaciones aritméticas, se puede operar con magnitudes (aunque con simbología distinta al tratarse de álgebra geométrica y no sólo aritmética, simbología que en este caso no vamos a introducir). Se trata de álgebra geométrica dado que trata a los elementos dimensionales como segmentos de una determinada longitud. Así, "metro de largo" es un segmento de una longitud determinada. Si se añaden más segmentos de esta misma dimensión dan lugar a otro más largo determinado por el número abstracto, en nuestro ejemplo "5" segmentos, lo que se ha dado en llamar proporción homogénea. Si se añaden segmentos de otra dimensión, como "metro de ancho", tendrán igual o distinta longitud, pero ya no se pueden añadir a continuación de los "metros de largo" porque son de distinta naturaleza, debiéndose multiplicar entre sí dando lugar geométricamente a un área que representa el tercer elemento dimensional resultante, en este caso la "superficie". Esto es la proporción heterogénea.

Este método aplicado a los problemas con magnitudes consiste en obtener una igualdad, cuánto trabajo se necesita (combinación de las medidas de igual o distinta dimensión) para obtener un resultado, es decir:

Cantidad de trabajo = Resultado del trabajo

Veámoslo con un ejemplo: si 5 hombres trabajando 6 horas diarias han abierto una zanja de 40 metros en 8 días, ¿cuántos días necesitarán 9 hombres trabajando 8 horas diarias para abrir una zanja de 60 metros?

Para el caso del supuesto planteado, ¿cuánto trabajo se necesita?, se necesitan 5 hombres, 6 horas diarias y 8 días. ¿Cuál es el resultado del trabajo?, una zanja de 40 metros. Así:

$$5 \text{ hombres} \times 6 \text{ horas diarias} \times 8 \text{ días} = 40 \text{ metros}$$

Para resolver la incógnita, la pregunta se puede plantear igualmente, sabiendo que el trabajo que se necesita es: 9 hombres y 8 horas diarias durante x días (los elementos dimensionales son los mismos). El resultado del trabajo es una zanja de 60 metros:

$$9 \text{ hombres} \times 8 \text{ horas diarias} \times X \text{ días} = 60 \text{ metros}$$

A partir de aquí basta con pasar todo a un lado de la igualdad despejando (recuérdese que «40 metros» y «60 metros» son multiplicaciones algebraicas). Con ello, obtendremos:

$$\frac{5 \text{ hombres} \times 6 \text{ horas diarias} \times 8 \text{ días}}{40 \text{ metros}} = 1$$

Así como

$$\frac{9 \text{ hombres} \times 8 \text{ horas diarias} \times X \text{ días}}{60 \text{ metros}} = 1$$

Ahora, resulta que ambas expresiones dan 1, por lo que ambas son iguales. Si separamos los números de las magnitudes, obtenemos para el primer caso:

$$\frac{5 \times 6 \times 8}{40} = \frac{\text{hombres} \times \text{horas diarias} \times \text{días}}{\text{metros}} = 1$$

Y para el segundo caso:

$$\frac{9 \times 8 \times X}{60} = \frac{\text{hombres} \times \text{horas diarias} \times \text{días}}{\text{metros}} = 1$$

Se puede observar que tenemos las mismas magnitudes en ambas expresiones, por lo que todas las magnitudes desaparecen quedando sólo la numérica:

$$\frac{5 \times 6 \times 8}{40} = \frac{9 \times 8 \times X}{60}$$

Operando:

$$6 = 1{,}2 \times X$$

Despejando la incógnita X obtenemos el resultado en una mera ecuación aritmética:

$$6/1{,}2=X=5$$

IV. ESTUDIO ESTADÍSTICO DE LA EFICACIA DIDÁCTICA DE CADA MÉTODO.

1. Metodología.

El objetivo del cuestionario es medir el grado de eficacia de cada uno de los métodos didácticos de la regla de tres compuesta. Para ello, se ha contado con una muestra de 97 estudiantes del Grado de Administración y Dirección de Empresas de los cursos 1.º, 2.º y 3.º.

Para alcanzar el objetivo, se ha estructurado el cuestionario de la siguiente forma:

1.º En primer lugar, se ha planteado el siguiente problema: si 5 hombres trabajando 6 horas diarias han abierto una zanja de 40 metros en 8 días, ¿cuántos días necesitarán 9 hombres trabajando 8 horas diarias para abrir una zanja de 60 metros?

El objetivo de esta primera cuestión es conocer si recuerdan cómo resolver este tipo de problemas.

2.º La segunda parte del cuestionario pretende medir la eficacia didáctica de cada uno de los métodos de esta investigación. Para ello, los pasos seguidos han sido:

- Primero, explicación del método de la reducción a la unidad con un ejemplo.
- Segundo, planteamiento de un problema a resolver por el estudiante según el método de la reducción a la unidad.
- Tercero, explicación del método de las proporciones con un ejemplo.
- Cuarto, planteamiento de un problema a resolver por el estudiante según el método de las proporciones
- Quinto, explicación del método práctico con un ejemplo.
- Sexto, planteamiento de un problema a resolver por el estudiante según el método práctico.
- Séptimo, explicación del método basado en la *Primera álgebra de magnitudes* con un ejemplo.
- Octavo, planteamiento de un problema a resolver por el estudiante según el método de la *Primera álgebra de magnitudes.*

La explicación de cada método didáctico se ha realizado por escrito conforme a la bibliografía estudiada en esta investigación en los mismos términos expuestos, habiéndose dado un tiempo de diez minutos para el estudio de cada uno. El método de la *Primera álgebra de magnitudes* se ha realizado con el mismo grado de demostración y extensión que los tres tradicionales en los términos del epígrafe III de este artículo.

El problema explicado a modo de ejemplo en cada método didáctico de los pasos primero, tercero, quinto y séptimo ha sido siempre el mismo: si 5 hombres trabajando 6 horas diarias han abierto una zanja de 40 metros en 8 días, ¿cuántos días necesitarán 9 hombres trabajando 8 horas diarias para abrir una zanja de 60 metros?

El problema planteado para resolver según cada método en los pasos segundo, cuarto, sexto y octavo ha sido siempre el mismo a fin de mantener el grado de dificultad: si 60 impresoras trabajando durante 40 días a 8 horas diarias imprimen 1.000 libros, ¿cuántos días tardarán 30 impresoras trabajando 6 horas al día en imprimir 750 libros?

Dado que el objetivo es medir la eficiencia didáctica de cada método, durante los diez minutos de tiempo para el estudio de cada método no se les ha permitido tomar apuntes que pudieran consultar durante la resolución del problema posterior y se les ha retirado la explicación escrita.

Adicionalmente, nunca se les ha indicado si el resultado alcanzado en los problemas que debían resolver eran correctos o no con el objetivo de que no fueran condicionados para las posteriores resoluciones.

3.º Se ha propuesto un último problema diferente a todos los anteriores con el fin de que lo resolvieran por el método que escogieran. El problema en cuestión ha sido el siguiente: dejando abiertos 9 grifos durante 8 horas a 20 grados se produce un gasto de 48 euros. ¿A cuántos grados deberá estar el agua dejando abiertos 15 grifos durante 5 horas para producir un gasto de 60 euros?

2. Resultados y discusión.

El primer problema planteado lo han resuelto llegando a la solución correcta 26 estudiantes (un 26,80 % de la muestra) de los 97 que han participado. De éstos, 19 lo han resuelto por intuición, 1 por el método de la reducción a la unidad, 3 por el método de las proporciones y 3 por el método práctico.

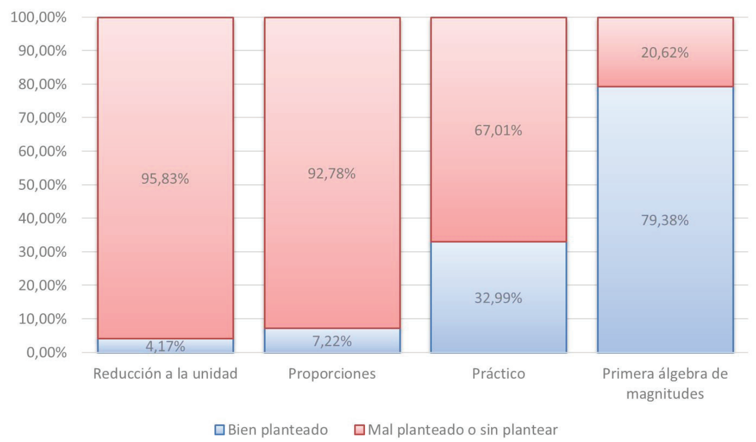
Los resultados obtenidos respecto al punto 2.º del epígrafe anterior se pueden observar en la Tabla 1. Con el fin de mostrar dichos resultados de forma más sencilla se facilita la Ilustración 1 según se haya planteado bien o, por el contrario, se haya planteado mal o no se haya planteado.

Se puede observar que el mejor resultado obtenido es con el método de la Primera álgebra de magnitudes, con el que el 79,38 % lo han planteado correctamente, mientras que con el método práctico este dato asciende al 32,99 %. Los métodos de la reducción a la unidad y de las proporciones tienen un porcentaje muy bajo de éxito, quedándose en el 4,17 % y 7,22 % respectivamente.

Tabla 1.
Resultados de la solución a los problemas planteados según cada método didáctico (punto 2.º del epígrafe IV. 1).

Método	Sin plantear	%	Mal planteado	%	Bien planteado	%
Reducción a la unidad	39	40,63	53	55,21	4	4,17
Proporciones	33	34,02	57	58,76	7	7,22
Práctico	21	21,65	44	45,36	32	32,99
Primera álgebra magnitudes	8	8,25	12	12,37	77	79,38

Ilustración 1.
Resultados de la solución a los problemas planteados según cada método didáctico (punto 2.º del epígrafe IV. 1).



Con todo ello, se observa una notable mejoría en la comprensión de este tipo de problemas por el método de la *Primera álgebra de magnitudes* frente a los demás, teniendo en cuenta que éste es completamente nuevo para los estudiantes dado que nunca han tenido conocimiento de él antes de la realización de este cuestionario, algo que no ocurre con, al menos, uno de los otros tres métodos.También se observa que el método práctico tiene una mayor facilidad de comprensión frente a los otros dos (reducción a la unidad y proporciones), aunque el porcentaje de éxito en la resolución de problemas sigue siendo bajo.

Obsérvese que el número de estudiantes en el método de la reducción a la unidad es de 96 (uno menos que el resto de métodos). Ello se debe a que, una vez comenzaron con la resolución del problema según este método se observó que había copiado la explicación realizada anteriormente habiendo resuelto el problema con dicho material, por lo que se ha retirado de los resultados.

Por último, en la Tabla 2 se observan los resultados obtenidos respecto al punto 3 del epígrafe IV. 1, es decir, la resolución de un nuevo problema por el método que libremente escogiera cada estudiante. Adicionalmente, en la Ilustración 2 se refleja la representación gráfica de dichos resultados.

Puede apreciarse que un 9,28 % de los estudiantes no han escogido ningún método, no habiendo sido capaces de plantear la solución correctamente. En la mayoría de estos casos se aprecia un intento de resolución por intuición.

El 75,26 % (73 estudiantes) han preferido el método de la *Primera álgebra de magnitudes*, siendo sólo un estudiante el que ha errado en el planteamiento. 9 estudiantes han preferido el método práctico habiendo errado el 66,67 % de todos ellos, proporción muy similar al de la Ilustración 1 respecto a este mismo método. Por último, los 3 estudiantes que han escogido el método de las proporciones lo han planteado incorrectamente. Lo mismo ocurre en el caso de los 3 estudiantes que han escogido el método de la reducción a la unidad.

V. CONCLUSIONES.

La primera de las conclusiones alcanzadas en sentido general es que la regla de tres como método didáctico queda obsoleto por su falta de fundamentación apoyándose únicamente en la intuición, quedando sustituido por una verdadera proporcionalidad de magnitudes a través del álgebra geométrica de las díadas que tradicio-

Tabla 2.
Resultados al último problema planteado según el método escogido por cada estudiante (punto 3.º del epígrafe 3.2.).

Método	Bien planteado	%	Mal planteado	%
Reducción a la unidad	0	0	3	3,09
Proporciones	0	0	3	3,09
Práctico	3	3,09	6	6,19
Primera álgebra de magnitudes	72	74,23	1	1,03

Ilustración 2.
Resultados al último problema planteado según el método escogido por cada estudiante (punto 3.º del epígrafe 3.2.).

nalmente se conocen como números concretos. Como se ha visto, la regla de tres tradicional se apoya en dos teorías que quedan desbancadas con las demostraciones de las díadas homogéneas y heterogéneas planteadas a partir de la geometría del álgebra de magnitudes.

La teoría de la proporcionalidad directa de las magnitudes —“se dice que dos magnitudes son directamente proporcionales cuando al multiplicar una de ellas por un número la otra resulta multiplicada por el mismo número y al dividir una de ellas por un número la otra resulta dividida por el mismo número”— pierde rigor con la aritmetización de la física y queda sustituida por la propiedad de la adición diádica o “proporción con díadas homogéneas” que se resume en: para que dos razones entre díadas homogéneas o aditivas sean proporcionales deben tener el mismo multiplicador o cociente abstracto.

La teoría de la proporcionalidad inversa de las magnitudes —“se dice que dos magnitudes son inversamente proporcionales cuando al multiplicar una de ellas por un número la otra queda dividida por el mismo número y al dividir una de ellas por un número la otra queda multiplicada por el mismo número”— sufre el mismo problema que la anterior quedando sustituida por la propiedad de la “proporción con díadas heterogéneas”, es decir, “dada la combinación entre dos díadas heterogéneas que dan lugar a una tercera combinada, cuando la primera díada se vea multiplicada o dividida por un número abstracto, para mantener dicha igualdad siendo la díada combinada invariable la segunda díada quedará dividida o multiplicada respectivamente por ese mismo número abstracto”.

Con ello, quedan superados los límites de los principios intuitivos en los que se basan los métodos tradicionales y se resuelve el problema de la aritmetización de la física cuya solución tradicional se basa en la eliminación de las magnitudes de las operaciones convirtiéndolas en mera aritmética, lo que como se ha justificado en este artículo no es la mejor de las ideas, debiéndose mantener las magnitudes con su respectivo elemento numérico constituyéndose en díadas.

Los problemas de “regla de tres” simple —con dos magnitudes— y compuesta —con más de dos magnitudes— se reducen a una mera proporcionalidad de magnitudes cuya única dificultad radica en el correcto planteamiento según la relación existente entre las distintas díadas, relación que queda determinada por la naturaleza de sus elementos dimensionales.

Así, si son de la misma naturaleza serán díadas homogéneas consistente en la adición, lo que se refleja directamente en el elemento numérico de la díada siendo aumentado o disminuido y manteniéndose el elemento dimensional. Por el contrario, si son díadas heterogéneas sus respectivos elementos dimensionales o magnitudes son de diferente naturaleza y la operación entre ellas se basa en la multiplicación y división geométricas dando lugar a otra díada con diferente elemento dimensional resultante de la combinación de los anteriores.

Con todo ello, en los problemas de la mal llamada “regla de tres” compuesta se exponen siempre una serie de díadas homogéneas y heterogéneas cuya combinación da lugar a un resultado que es otra díada, y se facilitan dos supuestos entre los que sólo varían los elementos numéricos quedando uno como incógnita a calcular. Así, los problemas de “regla de tres compuesta” quedan en un mero planteamiento proporcional algebraico de magnitudes.

Por último, se ha propuesto un método didáctico basado en la *Primera álgebra de magnitudes* —sin perjuicio de que el método se pueda mejorar incluyendo incluso la simbología real del álgebra de magnitudes— y se ha verificado su eficacia didáctica con un cuestionario cuyos resultados se resumen a continuación.

El método de la *Primera álgebra de magnitudes* tiene una mayor facilidad de comprensión que los otros tres métodos tradicionales alcanzando un 79,38 % de correcta solución del problema planteado. Los estudiantes que han resuelto correctamente el problema según los otros métodos es bastante inferior (32,99 % el método práctico; 7,22 % el método de las proporciones; 4,17 % el método de la reducción a la unidad).

También se ha concluido que los estudiantes prefieren el método basado en la *Primera álgebra de magnitudes* (75,26 % frente al 9,28 % del método práctico, 3,09 % del método de las proporciones, 3,09 del método de la reducción a la unidad y 9,28 % para ninguno).

VI. PROPUESTAS PARA FUTURAS LÍNEAS DE INVESTIGACIÓN.

Tras este estudio, se observan las siguientes posibles líneas de investigación:

Primera: repetir el mismo estudio estadístico a los estudiantes que aprenden los distintos métodos de la regla de tres compuesta por primera vez, es decir, a los estudiantes de 12 años. No obstante, la explicación que se realice del método basado en la *Primera álgebra de* *magnitudes* puede ser mejorada (incluso se valora la posibilidad de enseñar el método con la simbología de la *Primera álgebra de magnitudes* y todos los razonamientos expuestos en esta investigación) quedando como sigue:

La *Primera álgebra de magnitudes* plantea la no eliminación de las magnitudes en las operaciones de la física proponiendo el álgebra de magnitudes como solución al problema de la aritmetización de la física. Así, toda medida está compuesta por dos elementos: uno numérico y otro dimensional. Por ejemplo, "5 metros de largo" se compone del elemento numérico "5" y el dimensional "metro de largo", y a efectos algebraicos se multiplican. Si se añaden más "metros de largo" aumentará el número abstracto 5 siendo una proporción homogénea, pues el elemento dimensional es el mismo: "metro de largo". Si se añaden medidas de distinta naturaleza, es decir, con elemento dimensional diferente como "2 metros de ancho", estaremos ante una proporción heterogénea que es la multiplicación geométrica de las dos medidas "5 metros de largo" y "2 metros de ancho", dando lugar a una tercera medida: "superficie".

Al igual que en las operaciones aritméticas, se puede operar con magnitudes (aunque con simbología distinta al tratarse de álgebra geométrica y no sólo aritmética, simbología que en este caso no vamos a introducir). Es álgebra geométrica dado que trata a los elementos dimensionales como segmentos de una determinada longitud. Así, "metro de largo" es un segmento de una longitud determinada. Si se añaden más segmentos de esta misma dimensión dan lugar a otro más largo determinado por el número abstracto, en nuestro ejemplo "5" segmentos, lo que se ha dado en llamar proporción homogénea. Si se añaden segmentos de otra dimensión, como "metro de ancho", tendrán igual o distinta longitud, pero ya no se pueden añadir a continuación de los "metro de largo" porque son de distinta naturaleza, debiéndose multiplicar entre sí dando lugar geométricamente a un área que representa el tercer elemento dimensional resultante, la "superficie". Esto es la proporción heterogénea.

Aquí se observa que la división entre dos magnitudes homogéneas resulta un número abstracto. Ello se debe a que, si sumamos 3 veces 2 segmentos de la misma dimensión, por ejemplo, "metro", resulta:

$$2\text{metros}+2\text{metros}+2\text{metros}=3\times(2\text{metros})=6\text{metros}$$

$$\rightarrow \frac{6\text{metros}}{2\text{metros}}=\frac{6}{2}=3$$

Este método aplicado a la regla de tres compuesta consiste en obtener una igualdad, cuánto trabajo se necesita (combinación de las medidas de igual o distinta dimensión) para obtener un resultado, es decir:

Cantidad de trabajo = Resultado del trabajo

Veámoslo con un ejemplo: si 5 hombres trabajando 6 horas diarias han abierto una zanja de 40 metros en 8 días, ¿cuántos días necesitarán 9 hombres trabajando 8 horas diarias para abrir una zanja de 60 metros?

Para el caso del supuesto planteado, ¿cuánto trabajo se necesita? 5 hombres, 6 horas diarias y 8 días. ¿Cuál es el resultado del trabajo?, una zanja de 40 metros. Así:

$$5 \text{ hombres} \times 6 \text{ horas diarias} \times 8 \text{ días} = 40 \text{ metros}$$

Para resolver la incógnita, la pregunta se puede plantear igualmente, sabiendo que el trabajo que se necesita es: 9 hombres y 8 horas diarias durante X días. El resultado del trabajo es una zanja de 60 metros:

$$9 \text{ hombres} \times 8 \text{ horas diarias} \times X \text{ días} = 60 \text{ metros}$$

A partir de aquí, basta con dividir miembro a miembro ambas igualdades obteniendo la siguiente operación homogénea:

$$\frac{5 \text{ hombres} \times 6 \text{ horas diarias} \times 8 \text{ días}}{9 \text{ hombres} \times 8 \text{ horas diarias} \times X \text{ días}} = \frac{40 \text{ metros}}{60 \text{ metros}}$$

Al dividirse las magnitudes entre sí mismas, la operación queda en meramente aritmética:

$$\frac{5\times6\times8}{9\times8\times X}=\frac{40}{60}$$

Despejando la incógnita se obtiene el valor de X:

$$X=\frac{5\times6\times8\times60}{9\times8\times40}=5$$

Segunda: aplicar la *Primera álgebra de magnitudes* a los distintos temas de la física con el correspondiente método didáctico realizando igualmente un estudio estadístico para la comparación de la eficacia docente y aceptación por los estudiantes.

BIBLIOGRAFÍA REFERENCIADA

Arnaiz, J. M. (2021). *The new Physics I: First Algebra of Magnitudes.* LAP LAMBERT Academic Publishing.

Arnaiz, J. M. (2017). *Primera álgebra de magnitudes: La nueva Física.* Escuela de las Luces.

Arnaiz, J. M. (2021). *La nueva Física, Newton es el único que ha evitado la trampa de «aritmetizar» la Física. Einstein se equivocó de raíz.* Escuela de las Luces.

Albarracín, L. y Gorgorió, N. (2013). "Problemas de estimación de magnitudes no alcanzables: estrategias y éxito en la resolución". *PNA, 7*(3), pp. 103-115.

Bails, B. (1805). *Principios de Matemática de la Real Academia de San Fernando.* Tomo I. Cuarta edición, añadida. En la Imprenta de la hija de D. Joaquín Ibarra.

Galdós, L. (2000). *Matemáticas Galdós.* Madrid: Cultural, S.A.

García Escribano, S. y Resano Arenzana, A. (2015). *Matemáticas y ortografía para oposiciones.* Ediciones Rodio.

García, M. y Ortega, P. (2016), *Matemáticas aplicadas, 4.º ESO*, Luis Vives.

Gómez Alonso, B. (2006). Los ritos de la enseñanza de la regla de tres. En Maz Machado, A.; Torralbo Rodríguez, M y Rico Romero, L., *José Mariano Vallejo, el matemático ilustrado. Una mirada desde la educación matemática,* pp. 49-69. Publicaciones Universidad de Córdoba.

González Ortiz, A. (2020). *Competencia clave: Competencia Matemática.* Ediciones Paraninfo.

Grence Ruiz, T. (Dir.), autor desconocido (2023). *Matemáticas. Enseñanzas aplicadas.* Santillana Educación.

Ibáñez Freire, C. y Martínez Juste, S. (2020). "Proporcionalidad aritmética en libros de texto de 4.º ESO", *SUMA,* n.º 95, pp. 51-58.

Artés, M.; Badillo, E.; Blanco, J. J.; Bruno, A.; Callejo, M. L.; Camacho, M.; Contreras, L. C.; Cárdenas, J. A.; Carrillo, J.; Climent, N.; Diego, J. M.; Escudero, D. I.; Fernández, C.; Fernández, T.; Flores, E.; Fortuny, J. M.; Gomes, J.; González, M. T.; Gutiérrez, A.; Hernández, J.; Huerta, P.; Jaime, A.; Llinares, S.; Montes, M. A.; Moreno, M.; Ortega, T.; Planas, N.; Rodríguez, R.; Rojas, N.; y Socas, M. (2016). Capítulo 6: Magnitudes y proporcionalidad. En Carrillo Yáñez, J.; Contreras González, L. C.; Climent Rodríguez, N.; Montes Navarro, M. A.; Escudero Ávila, D. I y Flores Medrano, E. (Eds.) *Didáctica de las matemáticas para maestros de educación primaria.* Colección Didáctica y Desarrollo, pp. 135-168. Ediciones Paraninfo.

Llanos Vaca, L. y Moraleda Luna, B (2022). *Ciencias Aplicadas I*. CFGB. Editex.

Libro sin autor (2011). *Matemáticas 7. Segundo semestre.* IGER (Instituto Guatemalteco de Educación Radiofónica).

Libro sin autor (1982). *Matemáticas. Regla de tres.* SENA (Servicio Nacional de Aprendizaje, Ministerio de Trabajo y Seguridad Social).

Martínez Juste, S.; Muñoz Escolano, J. M. y Oller Marcén, A. M. (2015), "Un estudio comparativo sobre la proporcionalidad compuesta en libros de texto españoles de Educación Secundaria Obligatoria durante LOGSE-LOE-LOMCE", *AIEM – Avances de Investigación en Educación Matemática,* n.º 8, pp. 95-115.

Mira, R. (2016). *Matemáticas enseñanzas aplicadas 4.º ESO*, Santillana Educación, Madrid.

Mochón Cohen, S. (2012). *Enseñanza del razonamiento proporcional y alternativas para el manejo de la regla de tres.* Educación matemática, vol. 24 n.º 1, pp. 133-157.

Moya, P. y Zuasti, N. (2022). *Matemáticas orientadas a las enseñanzas aplicadas: 4.º ESO*, Textos Marea Verde

Postigo García, L. (1998). *Matemáticas Sopena.* Editorial Ramón Sopena, S.L.

Segovia Álex, I. y Rico Romero, L. (2015). *Matemáticas para maestros de Educación Primaria.* Ediciones Pirámide.

Silvestre, A. I. y da Ponte, J. P. (2012). "Missing value and comparison problems: What pupils know before the teaching proportion". *PNA, 6*(3), pp. 73-83.

Vallejo, C. y Fuentes, B. (2016), *Matemáticas orientadas a las enseñanzas aplicadas 4.º ESO*, Grupo Anaya.

Volera, J. y Gaztelu, I. (2014). *Matemáticas. Educación Secundaria.* Grupo Anaya.

Daniel Arnaiz Boluda. *Profesor doctor en la UEM 2021-actualidad. Colaborador docente en la UEM 2019-2021. Profesor en academia de matemáticas y otras asignaturas de ADE 2014-2020. Abogado del ICAM 2010-actualidad. Máster Universitario en Derecho Empresarial 2012. Doble licenciado en Derecho y ADE 2005-2011. Doctor cum laude en Derecho y Economía.*